

# Непертурбативная оболочечная поправка к формуле Бете–Блоха для потерь энергии быстрыми заряженными частицами

В. И. Матвеев<sup>1)</sup>, Д. Н. Макаров

Поморский государственный университет им. М.В. Ломоносова, 163002 Архангельск, Россия

Поступила в редакцию 21 апреля 2011 г.

Развит простой метод расчетов потерь энергии на сложных атомах, позволяющий учитывать непертурбативные оболочечные поправки. В качестве примеров рассчитаны потери энергии быстрых высокозарядных ионов на атомах неона, аргона, криптона и ксенона, проведено сравнение с экспериментальными данными. Показано, что учет непертурбативных оболочечных поправок приводит к заметному улучшению согласия с экспериментом по сравнению с расчетами по формуле Бете–Блоха со стандартными поправками. Это, несомненно, способствует уменьшению числа подгоночных параметров в различных модификациях формулы Бете–Блоха, обычно определяемых полуэмпирическим путем.

**1. Введение.** Формула Бете–Блоха служит основой для расчетов потерь энергии быстрыми заряженными частицами при столкновениях с различными мишенями. Стандартно (см., например, [1]) с учетом дополнительных поправок формулу Бете–Блоха используют в виде (атомные единицы)

$$S = 4\pi \frac{Z^2}{v^2} N_a \left( L^{\text{Bethe}} + \Delta L^{\text{Bloch}} + \Delta L^{\text{Shell}} + \Delta L^{\text{Barkas}} \right), \quad (1)$$

где  $Z$  и  $v$  – заряд и скорость снаряда,  $N_a$  – число электронов в мишени, величина  $L^{\text{Bethe}} = \ln(2v^2/I)$  рассчитана Бете [2] в низшем порядке теории возмущений,  $I$  – средний потенциал ионизации мишени,  $\Delta L^{\text{Bloch}} = -\text{Re}\psi(1 + iZ/v) + \psi(1)$  – поправка Блоха [3],  $\psi(x)$  – логарифмическая производная Г-функции,  $\Delta L^{\text{Shell}}$  – оболочечная поправка (см., например, [4]),  $\Delta L^{\text{Barkas}}$  – поправка Баркаса (Barkas) [5]. При проведении расчетов потерь энергии с различного рода мишенями и при движении тормозящихся ионов в различных средах в формулу (1) вводят ряд подгоночных параметров, значения которых находят полуэмпирическими методами. Такая параметризация прежде всего необходима для определения эффективных зарядов ионов при движении в различных средах. Из согласования с экспериментальными данными выводятся рекомендуемые значения средних потенциалов ионизации многоэлектронных мишеней. В полуэмпирической параметризации нуждаются и величины поправок  $\Delta L^{\text{Barkas}}$  и  $\Delta L^{\text{Shell}}$  [1, 6]. В такой ситуации введение дополнительных поправок, общий вид которых рассчитывается из первых принципов, позволяет надеяться на уменьшение необхо-

димого числа полуэмпирических параметров либо на приведение их значений к величинам более близким к теоретическим оценкам. Одна из таких возможных дополнительных поправок к формуле Бете–Блоха возникает следующим образом [7]. Вывод формулы Бете–Блоха по сути основан [3, 8, 9] на разбиении всей области параметров удара на две области: область больших параметров удара, в которой применима теория возмущений, и область малых параметров удара, в которой электроны мишени рассматриваются как свободные. При таком подходе вклад от области промежуточных (сравнимых с характерным размером атома) параметров удара учитывается лишь в первом порядке теории возмущений, несмотря на то что именно в этой области параметров удара взаимодействие снаряда и электронов мишени максимально и, вообще говоря, необходим непертурбативный учет [6, 7]. Недавно [7] потери энергии быстрыми заряженными частицами при столкновениях с атомами были рассмотрены на основе приближения эйконала, позволяющего в рамках единого непертурбативного подхода рассчитать эффективное торможение во всей области параметров удара. Показано, что непертурбативный вклад в эффективное торможение от области сравнимых с характерными размерами электронных оболочек мишени параметров удара может оказаться значительным по сравнению с оболочечными поправками  $\Delta L^{\text{Shell}}$  к формуле Бете–Блоха, рассчитываемыми в первом порядке теории возмущений. Поэтому в работах [7, 10] предложено в правую часть формулы (1) добавить непертурбативную оболочечную поправку  $\Delta L$ , значения которой в приближении эйконала для многоэлектронных мишеней в принципе могут быть рассчитаны по формулам (57) и (58) работы [10]. Непосредственные расчеты по этим формулам возможны лишь в численном виде. Они ста-

<sup>1)</sup> e-mail: matveev.victor@pomorsu.ru

новятся крайне громоздкими и трудновыполнимыми при использовании в качестве мишеней сложных атомов. Поэтому, к настоящему времени удалось [7, 10] проделать расчеты лишь для атомов водорода.

В настоящей работе развит простой метод расчетов потерь энергии на сложных атомах, позволяющий учитывать непертурбативные оболочечные поправки, используя их значения, полученные для водородоподобных атомов. В качестве примеров рассчитаны потери энергии высокозарядных быстрых ионов на атомах неона, аргона, криптона и ксенона, проведено сравнение с экспериментальными данными. Показано, что учет непертурбативных оболочечных поправок приводит к заметному улучшению согласия с экспериментом по сравнению с расчетами по формуле Бете–Блоха со стандартными поправками (1).

**2. Непертурбативная оболочечная поправка для водородоподобных атомов.** Согласно [7, 10] непертурбативная оболочечная поправка для атома водорода, находящегося до столкновения в состоянии  $|0\rangle$ , в приближении эйконала равна

$$\Delta L = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{q_0 \leq q \leq q_1} \langle 0 | \mathbf{I}(\mathbf{q}) \mathbf{I}^*(\mathbf{q}) - \frac{(2\pi)^2}{q^2} |0\rangle d^2 \mathbf{q} - \Delta L^{\text{Bloch}}, \quad (2)$$

где пределы интегрирования по переданному импульсу  $\mathbf{q}$  равны  $q_1 = 2v \gg 1$  и  $q_0 \ll 1$ . Поэтому при расчетах  $\Delta L$  можно считать  $q_0 = 0$  (см. обсуждение после формулы (61) статьи [10]),

$$\mathbf{I}(\mathbf{q}) = \int \exp(-i\mathbf{q}\mathbf{b}) |\mathbf{b} + \mathbf{s}|^{-i2\eta} |\mathbf{b}|^{i2\eta} \frac{\mathbf{b}}{|\mathbf{b}|^2} d^2 \mathbf{b}, \quad (3)$$

где  $\mathbf{s}$  – проекция координат электрона атома водорода на плоскость параметра удара  $\mathbf{b}$ .

Ранее на основе представления о рассеянии ограниченных кулоновских волн была получена [10] (с относительной погрешностью не более трех процентов) простая аппроксимация выражения (2):

$$\Delta L = \gamma + K_0(2x) + \ln(x), \quad (4)$$

где  $\gamma = 0.5772$  – постоянная Эйлера,  $K_0(2x)$  – функция Макдональда,  $x = (2\beta)^{1/2} \eta/v$ ,  $\eta = Z/v$  – кулоновский параметр. В аппроксимации (4) от вида функции  $|0\rangle$  зависит лишь параметр  $\beta$ , связанный с  $b_0$  (характерным размером состояния  $|0\rangle$ ) соотношением  $b_0 = 1/\sqrt{\beta}$ , так что из общих соображений параметр  $\beta$  известен лишь по порядку величины. Точные значения параметра  $\beta$  можно определить, требуя совпадения результатов численных расчетов по формулам (2) и (3) со значениями  $\Delta L$ , даваемыми формулой (4). Именно так в работе [10] было по-

лучено значение  $\beta = 0.141$ , при котором формула (4) воспроизводит значения  $\Delta L$  для атома водорода в основном состоянии. Отметим, что при этом  $b_0 = 1/\sqrt{\beta} = 2.66$ . Согласно [10] область параметров  $Z$  и  $v$ , при которых поправка  $\Delta L$  мала, определяется неравенством  $x \ll 1$ , поскольку в этом случае функция Бесселя  $K_0(2x) = -[\gamma + \ln(x)]$  с точностью до величин меньших или порядка  $x^2$  (точнее  $x^2 \ln x$ ). Используя  $x = 0.531\eta/v$ , получаем, что непертурбативную оболочечную поправку  $\Delta L$  следует учитывать при  $\eta/(2v) \geq 1$ , т.е. при больших  $\eta \gg 1$  (поскольку всегда  $v \gg 1$ ). Этот вывод, строго говоря, справедлив только для атомов с небольшим (порядка единицы) числом электронов, поскольку для сложных атомов непертурбативные оболочечные поправки вносят пропорциональный числу электронов на оболочках вклад (см. ниже), который может оказаться заметным даже при малых  $x$ .

Сначала по формуле (2) проведем численные расчеты  $\Delta L$  для атома водорода, находящегося до столкновения в произвольном состоянии  $|nlm\rangle$  ( $n$  – главное квантовое число,  $l$  – орбитальный момент,  $m$  – его проекция), и найдем соответствующую непертурбативную оболочечную поправку  $\Delta L = \Delta L_{nlm}$ . Далее найдем среднее по орбитальному моменту и его проекции, т.е.

$$\Delta L_n = \frac{1}{n^2} \sum_{l=0}^{n-1} \sum_{m=-l}^{m=l} \Delta L_{nlm}. \quad (5)$$

Приравнивая вычисленные значения  $\Delta L_n$  выражению (4), мы провели численные расчеты значений параметра  $\beta$  для атомов водорода, находящихся до столкновения в состояниях с различными значениями главного квантового числа  $n$ . Ниже мы будем обозначать их как  $\beta_n$ . Другими словами,  $\beta_n$  – это значение параметра  $\beta$ , при котором формула (4) воспроизводит значения  $\Delta L_n$ . При выполнении расчетов мы, как и в работе [10], изменяли относительную скорость столкновения и заряд налетающего иона в широких пределах. В итоге мы получили следующие значения  $\beta_n$ , которые будут использоваться для дальнейших расчетов:

$$\begin{aligned} \beta_{n=1} &= 0.141, \\ \beta_{n=2} &= 0.00309, \\ \beta_{n=3} &= 0.000778, \\ \beta_{n=4} &= 0.000252, \\ \beta_{n=5} &= 0.000103. \end{aligned} \quad (6)$$

Для водородоподобного атома с эффективным зарядом ядра  $Z_a$ , очевидно, необходимо исходя из соотношения  $b_0 = 1/\sqrt{\beta}$  заменить  $\beta_n$  на  $\beta_n Z_a^2$ . Соответ-

ственно, в формуле (4) аргумент  $x = (2\beta_n)^{1/2} Z_a \eta / v$ . В принципе можно было бы ввести более детальное описание с помощью параметра  $\beta$ , а именно можно было ввести значения  $\beta_{nlm}$ , при которых формула (4) воспроизводила бы значения  $\Delta L = \Delta L_{nlm}$ . Однако во всех вышеприведенных случаях такое уточнение приводило к результатам, различающимся менее чем на один процент. Именно поэтому мы используем ниже менее детальные значения  $\beta_n$ , приведенные в формулах (6).

**3. Неperтурбативная оболочечная поправка для сложных атомов.** Воспользуемся результатами, полученными для водородоподобных атомов, для того, чтобы найти непертурбативную оболочечную поправку для сложного многоэлектронного атома. Для этого запишем среднюю энергию возбуждения атома при столкновении с ионом:

$$\overline{\Delta \varepsilon} = \sum_n (\varepsilon_n - \varepsilon_0) W_n, \quad (7)$$

где  $W_n$  – вероятность перехода атома из состояния  $|0\rangle$  с энергией  $\varepsilon_0$  в состояние  $|n\rangle$  с энергией  $\varepsilon_n$  в результате столкновения с тормозящимся ионом. Сделаем следующие упрощающие предположения для описания многоэлектронного атома. Будем считать электроны различимыми. Их состояния будем описывать одноэлектронными волновыми функциями в среднем поле. Тогда  $W_n = W_{n1, n2, n3, \dots, nN}$ , где  $ni$  – квантовые числа электрона с номером  $i$ , находящегося в одноэлектронном состоянии  $|ni\rangle$  с энергией  $\varepsilon_{ni}$ . Это состояние и его энергия зависят от конфигурации остальных  $N_a - 1$  электронов атома. Согласно [10] основной вклад в поправку  $\Delta L$  вносят большие переданные импульсы  $q \geq 1$  (см. обсуждение после формулы (61) в статье [10]). При больших переданных импульсах согласно [11] (см. конец параграфа 149) происходит ионизация атома, причем практически все импульс  $q$  и энергия передаются одному атомному электрону. Таким образом, мы будем оценивать поправку  $\Delta L$ , учитывая только одноэлектронные возбуждения. Тогда средние потери энергии представляются в виде суммы потерь на каждом электроне в отдельности при “замороженном” положении остальных атомных электронов, поэтому (7) можно переписать так:

$$\overline{\Delta \varepsilon} = \sum_{n1} \Delta \varepsilon_{n1} W_{n1, 0, \dots, 0} + \sum_{n2} \Delta \varepsilon_{n2} W_{0, n2, 0, \dots, 0} + \dots + \sum_{nN} \Delta \varepsilon_{nN} W_{0, \dots, 0, nN}, \quad (8)$$

где  $W_{0, \dots, 0, ni, 0, \dots, 0}$  – вероятность перехода электрона с номером  $i$  из состояния  $|0i\rangle$  (с энергией  $\varepsilon_{0i}$ ), в котором он находился до столкновения, в произвольное состояние  $|ni\rangle$  с энергией  $\varepsilon_{ni}$  при заморо-

женном положении остальных атомных электронов,  $\Delta \varepsilon_{ni} = \varepsilon_{ni} - \varepsilon_{0i}$  – соответствующая энергия перехода. Тогда каждое слагаемое в формуле (8), очевидно, имеет смысл потерь энергии на одноэлектронном атоме, электрон которого находится в среднем поле, создаваемом всеми остальными “замороженными” электронами. Конечно же, средние потери энергии на каждом таком одноэлектронном атоме зависят от энергий и волновых функций всех возбужденных состояний  $|ni\rangle$ . Однако интересующая нас величина  $\Delta L$  согласно (2), зависит лишь от волновой функции начального состояния  $|0i\rangle$  (см., также [10]).

Таким образом, рассчитав  $\Delta L$  для каждого из одноэлектронных атомов, соответствующих слагаемым в формуле (8), и просуммировав результаты, мы получим значение  $N_a \Delta L$  для сложного атома, содержащего  $N_a$  электронов. Ниже при описании состояний многоэлектронного атома мы будем использовать водородоподобные функции  $|nlm\rangle$  с эффективными зарядами  $Z_a^{(n,l)}$ , определяемыми согласно правилам (аналогичным известным правилам Слейтера [12]), предложенным в статье [13]. В этом случае непертурбативные оболочечные поправки, вычисленные по формуле (4) с эффективными зарядами  $Z_a^{(n,l)}$ , оказываются зависящими от  $n$  и  $l$  и не зависящими от  $m$ . Поэтому мы будем обозначать их как  $\Delta L_{n,l}$ . В итоге общая формула для расчета непертурбативной оболочечной поправки для сложного многоэлектронного атома примет вид

$$\Delta L = \frac{1}{N_a} \sum_{n,l} N_{n,l} \Delta L_{n,l}, \quad (9)$$

где  $N_{n,l}$  – число атомных электронов в состояниях с квантовыми числами  $n, l$ . В формуле (9) суммирование производится только по заполненным состояниям и  $\sum_{n,l} N_{n,l}$  равна  $N_a$ , т.е. общему числу электронов в данном атоме (напомним, что речь идет о числе заполнения  $N_{n,l}$  для атома, находящегося до столкновения в основном состоянии). Значения оболочечных поправок  $\Delta L_{n,l}$  рассчитываются по формуле (4), которую удобно переписать так:

$$\Delta L_{n,l} = \gamma + K_0 \left( 2 \frac{(2\beta_n)^{1/2} Z_a^{(n,l)} \eta}{v} \right) + \ln \left( \frac{(2\beta_n)^{1/2} Z_a^{(n,l)} \eta}{v} \right), \quad (10)$$

где  $Z_a^{(n,l)}$  – эффективный заряд ядра атома для электрона, находящегося в состоянии  $|n, l\rangle$ , при фиксированных состояниях остальных атомных электронов. Отметим, что хотя согласно (6) значения  $\beta_n$  малы, значения аргумента функции Макдональда в

(10), вообще говоря, нельзя считать малыми по сравнению с единицей. Поэтому зависимость  $\Delta L_{n,l}$  от  $Z$ ,  $Z_a^{(n,l)}$  и  $v$  имеет сложный характер. Для полноты рассмотрим поведение  $\Delta L_{n,l}$  при малых значениях аргумента функции  $K_0(2x)$ , когда  $K_0(2x) = -\ln(xe^\gamma) - x^2 \ln(xe^\gamma)$ . Тогда зависимость  $\Delta L_{n,l}$  от  $Z$ ,  $Z_a^{(n,l)}$  и  $v$  при выполнении условия  $2(2\beta_n)^{1/2} Z_a^{(n,l)} Z/v^2 \ll 1$  имеет вид

$$\Delta L_{n,l} = - \left( \frac{(2\beta_n)^{1/2} Z_a^{(n,l)} Z}{v^2} \right)^2 \times \ln \left( \frac{(2\beta_n)^{1/2} Z_a^{(n,l)} Z e^\gamma}{v^2} \right). \quad (11)$$

Однако даже в этом случае поправка  $\Delta L_{n,l}$  может вносить заметный вклад в (9), поскольку входит в  $\Delta L$  умноженной на числа заполнения  $N_{n,l}$ .

Рассмотрим для определенности расчет  $\Delta L$  на примере атома аргона с 18 электронами и распределением  $(1s^2, 2s^2, 2p^6, 3s^2, 3p^6)$  в основном состоянии. Рассчитываем  $\Delta L_{1,0}$  по формуле (10) с  $\beta_{n=1} = 0.141$  из формул (6) и эффективным зарядом  $Z_a^{(1,0)} = 17.65$  активного  $1s$ -электрона по правилам [13] при фиксированных состояниях остальных 17 электронов аргона. Далее рассчитываем  $\Delta L_{2,0}$  по формуле (10) с  $\beta_{n=2} = 0.00309$  из формул (6) с эффективным зарядом  $Z_a^{(2,0)} = 14.75$  активного  $2s$ -электрона по правилам [13] при фиксированных состояниях остальных 17 электронов аргона. Далее рассчитываем  $\Delta L_{2,1}$  по формуле (10) с  $\beta_{n=2} = 0.00309$  из формул (6) с эффективным зарядом  $Z_a^{(2,1)} = 12.65$  активного  $2p$ -электрона по правилам [13] при фиксированных состояниях остальных 17 электронов аргона. Точно так же с  $\beta_{n=3} = 0.000778$  рассчитываем  $\Delta L_{3,0}$  для активного  $3s$ -электрона ( $Z_a^{(3,0)} = 8.85$ ), а для активного  $3p$  электрона рассчитываем  $\Delta L_{3,1}$  ( $Z_a^{(3,1)} = 7.05$ ). В результате для атома аргона с 18 электронами в основном состоянии непertурбативная оболочечная поправка равна

$$\Delta L = \frac{1}{18} (2\Delta L_{1,0} + 2\Delta L_{2,0} + 6\Delta L_{2,1} + 2\Delta L_{3,0} + 6\Delta L_{3,1}). \quad (12)$$

**4. Результаты расчетов, сравнение с экспериментальными данными.** Таким образом, эффективное торможение движущегося со скоростью  $v$  иона с зарядом  $Z$  на атоме, содержащем  $N_a$  электронов, с учетом непertурбативной поправки  $\Delta L$  имеет вид (см. также [10])

$$S = 4\pi \frac{Z^2}{v^2} N_a \left( L^{\text{Bethe}} + \Delta L^{\text{Bloch}} + \Delta L^{\text{Shell}} + \Delta L^{\text{Barkas}} + \Delta L \right), \quad (13)$$

где  $\Delta L$  выражается формулой (9).

Для того чтобы проиллюстрировать необходимость учета непertурбативной оболочечной поправки путем сравнения с экспериментальными данными, мы провели расчеты потерь энергии быстрыми ионами на атомах неона, аргона, криптона и ксенона. При расчетах с целью использования минимального числа подгоночных параметров мы использовали эффективный заряд тормозящегося иона  $Z$  в виде [1, 14, 15], согласующемся с оценками Бора [16, 17]:

$$Z = Z_0 \left[ 1 - \exp \left( v/Z_0^{2/3} \right) \right],$$

где  $Z_0$  – заряд голого иона. Поправка  $\Delta L^{\text{Shell}}$  рассчитывалась по формуле (9') из работы Зигмунда [18] без использования подгоночных параметров на основе модели гармонического осциллятора с частотой  $\omega = I$ , где  $I$  – потенциал ионизации мишени. Поправка Баркаса рассчитывалась согласно [19, 20] с рекомендуемым [1, 20] значением единственного подгоночного параметра  $\kappa = \sqrt{2}$  (обозначение статьи [19]). Средние потенциалы ионизации мишеней были взяты из обзора [21] (см. табл. VI, рекомендованные значения  $I$ ).

Результаты расчетов представлены на рис. 1–4. На всех рисунках введены единые обозначения: результаты расчетов потерь энергии с учетом не-

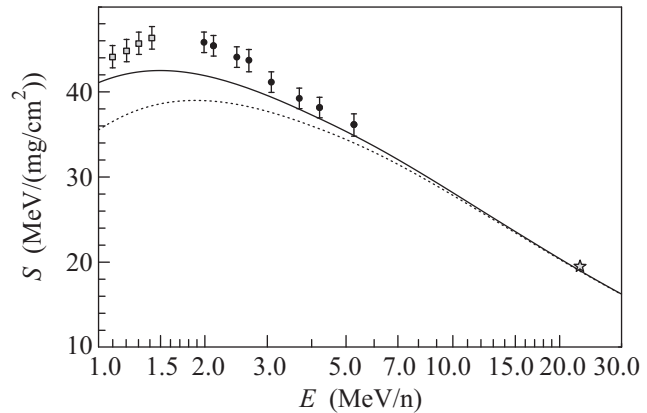


Рис.1. Потери энергии  $S$  (в  $\text{MeV}/(\text{mg}/\text{cm}^2)$ ) ионов криптона на атомах неона как функция от энергии ионов  $E$  (в  $\text{MeV}/n$ ).

пertурбативной оболочечной поправки  $\Delta L$  по формуле (13) изображены сплошной линией; результаты расчетов потерь энергии без учета поправки  $\Delta L$  по стандартной формуле (1) изображены пунктирной линией; звездочки – экспериментальные данные [22],

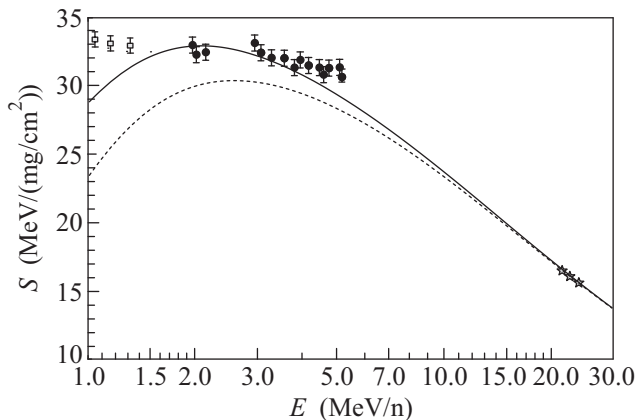


Рис.2. Потери энергии  $S$  (в  $\text{MeV}/(\text{mg}/\text{cm}^2)$ ) ионов криптона на атомах аргона как функция от энергии ионов  $E$  (в  $\text{MeV}/\text{n}$ ).

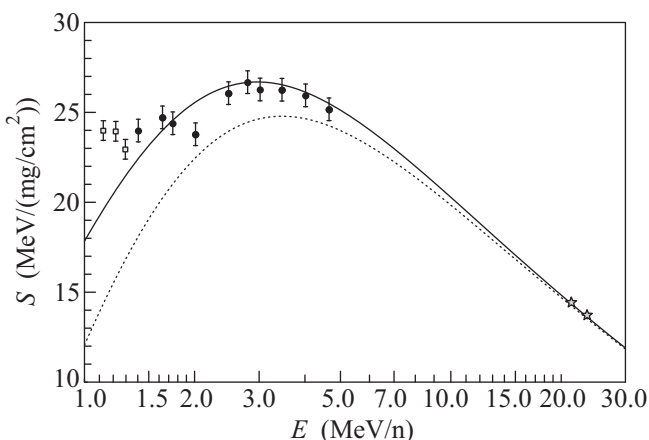


Рис.3. Потери энергии  $S$  (в  $\text{MeV}/(\text{mg}/\text{cm}^2)$ ) ионов криптона на атомах криптона как функция от энергии ионов  $E$  (в  $\text{MeV}/\text{n}$ ).

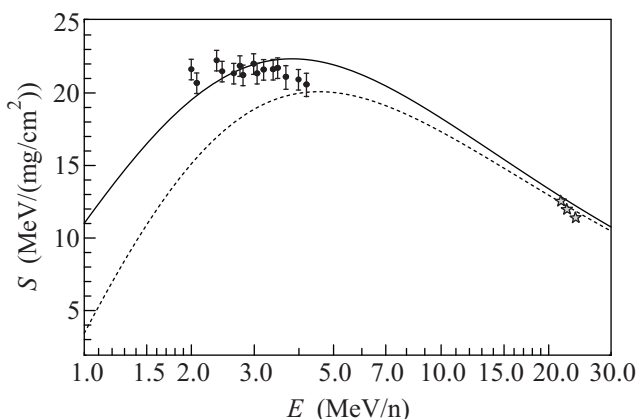


Рис.4. Потери энергии  $S$  (в  $\text{MeV}/(\text{mg}/\text{cm}^2)$ ) ионов криптона на атомах ксенона как функция от энергии ионов  $E$  (в  $\text{MeV}/\text{n}$ ).

кружки – экспериментальные данные [23], квадраты – экспериментальные данные [24, 25]. Экспериментальные данные [22–25] можно найти также на сайте <http://www.exphys.uni-linz.ac.at/stopping/>.

Следует отметить, что во всех случаях, несмотря на минимальное число подгоночных параметров, наблюдается заметное улучшение согласия с экспериментальными данными при учете непертурбативной оболочечной поправки  $\Delta L$ .

Работа выполнена при финансовой поддержке Президента РФ (грант # МК-3592.2011.2).

1. J. F. Ziegler, Appl. Phys. A: Mater. Sci. Process. **85**, 1249 (1999).
2. H. A. Bethe, Ann. Phys., Lpz. **5**, 324 (1930).
3. F. Bloch, Ann. der Phys. **16**, 285 (1933).
4. H. Bichsel, Phys. Rev. A **65**, 052709 (2002).
5. W. H. Barkas, W. Birnbaum, F. M. Smith, Phys. Rev. **101**, 778 (1956).
6. P. K. Sigmund, Dan. Vidensk. Selsk. Mat. Fys. Medd. **52**, 557 (2006), *Special issue on Ion Beam Science: Solved and Unsolved Problems*, Ed. by P. Sigmund.
7. В. И. Матвеев, Д. Н. Макаров, Е. С. Гусаревич, Письма в ЖЭТФ **92**, 317 (2010).
8. J. Lindhard and A. Sorensen, Phys. Rev. A **53**, 2443 (1996).
9. V. J. Khodyrev, Phys. B **33**, 5045 (2000).
10. В. И. Матвеев, Д. Н. Макаров, Е. С. Гусаревич, ЖЭТФ, **139**, 868 (2011).
11. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Квантовая механика*, М.: Наука, 1989, 768 с.
12. J. C. Slater, Phys. Rev. **36**, 57 (1930).
13. G. Burns, J. Chem. Phys. **41**, 1521 (1964).
14. L. C. Northcliffe, Phys. Rev. **120**, 1744 (1960).
15. N. J. Carron, *An Introduction to the Passage of Energetic Particles through Matter*, CRC Press, Taylor and Francis Group, New York–London, 2007.
16. N. Bohr, Phys. Rev. **58**, 654 (1940).
17. N. Bohr, Phys. Rev. **59**, 279 (1941).
18. P. Sigmund and U. Haagerup, Phys. Rev. A **34**, 892 (1986).
19. J. D. Jackson and R. L. McCarthy Phys. Rev. B **6**, 4131 (1972).
20. H. Bichsel, Phys. Rev. A **41**, 3642 (1990).
21. S. P. Ahlen, Rev. Mod. Phys. **52**, 121 (1980).
22. J. Herval, R. Bimbot, H. Gauvin et al., Nucl. Instrum. Methods Phys. Res. **B61**, 156 (1991).
23. R. Bimbot, C. Cabot, D. Gardes et al., Nucl. Instrum. Methods Phys. Res. B **44**, 19 (1989).
24. H. Geissel, Y. Laichter, W.F.W. Schneider, and P. Armbruster, Phys. Lett. A **88**, 26 (1982).
25. H. Geissel, Y. Laichter, R. Albrecht et al., Nucl. Instrum. Methods Phys. Res. B **206**, 609 (1983).