

Министерство образования и науки Российской Федерации
Поморский государственный университет им. М. В. Ломоносова
Физический факультет
Кафедра теоретической физики

И. Н. Пашев

**Центрально-симметричное гравитационное поле
в общей теории относительности**

(методические рекомендации)

Архангельск, 2010

Печатается по решению редакционно-издательской комиссии физического факультета Поморского государственного университета им. М. В. Ломоносова.

Автор: *Игорь Николаевич Пашев*, кандидат физ.-мат. наук, старший преподаватель кафедры теоретической физики физического факультета Поморского государственного университета им. М. В. Ломоносова (pashev.igor@gmail.com).

Рецензенты: *Дмитрий Борисович Сидоров*, кандидат физ.-мат. наук, доцент кафедры теоретической физики физического факультета Поморского государственного университета им. М. В. Ломоносова.

Александр Константинович Титов, кандидат физ.-мат. наук, доцент кафедры информатики, вычислительной техники и методики преподавания информатики физического факультета Поморского государственного университета им. М. В. Ломоносова.

Методические рекомендации предназначены студентам старших курсов и аспирантам физического факультета для самостоятельной работы при изучении курса общей теории относительности. Они могут быть полезны также студентам-математикам для более глубокого понимания связи математики и физики.

© 2010, И. Н. Пашев. Любая часть этой брошюры или вся она целиком должна быть использована, воспроизведена, скопирована или передана любым людям, с изменениями или без таковых, за вознаграждение или без оно, в любой форме, любыми средствами и с любой целью, кроме случаев, предусмотренных законодательством. Любые действия или бездействие, препятствующие этому, осуждаются автором.

Содержание

1	Предисловие	4
2	Центрально-симметричное поле	5
2.1	Решение уравнения Эйнштейна для центрального поля	5
2.2	Уравнения движения в центральном поле	12
2.3	Вращение орбит тел Солнечной системы	15
2.4	Искривление световых лучей в поле Солнца	19
2.5	Гравитационная задержка сигнала	21
	Приложение: решение Шварцшильда в «Мáксиме»	24
	Источники	26

1 Предисловие

Книжка посвящена более-менее элементарному изложению теории центрально-симметричного гравитационного поля в общей теории относительности. Центральное-симметричное поле, оно же сферически-симметричное, — это гравитационное поле, создаваемое относительно небольшими телами в относительно большом пространстве. Хороший пример — гравитационное поле Солнца в Солнечной системе, с которым связаны первые и основные попытки экспериментальной проверки общей теории относительности и других, альтернативных, теорий гравитации.

В деталях показан математический путь от уравнений теории к эксперименту на примере трёх, теперь уже классических, экспериментов в Солнечной системе: вращение орбит планет, отклонение света и задержка сигнала. Подробно показано определение символов Кристоффеля и тензора Риччи через компоненты метрического тензора. Даны методические рекомендации по облегчению вывода соответствующих выражений, в том числе с использованием компьютера.

Не затронуты вопросы внутреннего решения Шварцшильда, чёрных дыр и многие другие интересные вещи. Математические основы общей теории относительности также не вписываются в рамки изложения. За неизвестными словами следует обращаться к другой литературе.

Популярное введение в теорию относительности написал Сам [1]. Так как основной (точнее, фоновой) темой этой работы является метрика (измерения), то для понимания общей картины может быть полезной книга [2]. Очень хорошая обзорная книга с историческими замечаниями написана В. Паули [3], но для её чтения требуется некоторая эрудиция. Общий подробный курс элегантно изложен в [4–6]. В качестве справочника можно использовать «ландафшица» [7, 8].

Математика общей теории относительности проста, местами элементарна, но её много, поэтому существенную помощь может оказать компьютер. Для определения символов Кристоффеля, компонент всевозможных тензоров, взятия интегралов, нахождения производных, решения простых дифференциальных уравнений и просто арифметических расчётов есть прекрасные *свободные* программы: «Аксиома» (Axiom [9]), «Мáксима» (Maxima [10]). В приложении приведён пример работы с «Максимой», по которой доступна масса руководств [11, 12].

Все упомянутые книги, программы, люди найдутся в интернете.¹⁾

¹⁾<http://google.com>, <http://yandex.ru>.

2 Центральное-симметричное поле

2.1 Решение уравнения Эйнштейна для центрального поля

2.1.1 Правила игры

Будем решать уравнение Эйнштейна¹⁾

$$R_{ik} - \frac{1}{2}g_{ik}R = \frac{8\pi G}{c^4}T_{ik}, \quad (5.1)$$

в котором $c = 299792458$ м/с — скорость света, $G = 6,673 \cdot 10^{-11}$ м³/(кг·с²) — гравитационная постоянная, g_{ik} — метрический тензор, T_{ik} — тензор энергии-импульса, R_{ik} — тензор Риччи,²⁾ $R \equiv R^i_i$. При более внимательном рассмотрении уравнение (5.1) — это система из 16-ти уравнений.

В этой части нас не интересует форма T_{ik} , главное то, что этот тензор равен нулю, так как мы ищем поле в пустоте, окружающей центральное тело. А вот форма тензора Риччи очень даже нужна:

$$R_{ik} = \frac{\partial \Gamma^l_{ik}}{\partial x^l} - \frac{\partial \Gamma^l_{il}}{\partial x^k} + \Gamma^l_{ik}\Gamma^m_{lm} - \Gamma^m_{il}\Gamma^l_{km}, \quad (5.2)$$

так же, как и новые буквы в нём — символы Кристоффеля:³⁾

$$\Gamma^i_{kl} = \frac{1}{2}g^{im} \left(\frac{\partial g_{km}}{\partial x^l} + \frac{\partial g_{ml}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{kl}}{\partial x^m} \right). \quad (5.3)$$

Под словом «решение» здесь подразумевается такая система координат с известной метрикой g_{ik} , которая по цепочке (5.3) → (5.2) → (5.1) обращает уравнение Эйнштейна (последнее в цепочке) в верное тождество.

2.1.2 Метрика

Решать уравнение Эйнштейна так, как решаются простые уравнения вроде $\ln(x+1) = 3$, вряд ли возможно, потому что на самом деле оно представляет собой систему из 16-ти нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка относительно 16-ти неизвестных g_{ik} . К тому же в таком подходе, если решение найдено, возникает естественный вопрос о физическом смысле входящих в него координат: что куда подставлять при экспериментальной проверке?⁴⁾ Также необходимо помнить о константах интегрирова-

¹⁾ Не особо интересуясь откуда оно взялось, не углубляясь в физический, математический, философский или религиозный смысл входящих в него обозначений. По крайней мере не здесь [3, 4, 8, 13].

²⁾ Грегорио Риччи-Курбастро (1853–1925) — итальянский математик.

³⁾ Элвин Бруно Кристоффель (1829–1900) — немецкий математик.

⁴⁾ Например, которое из этих уравнений суть уравнение прямой: $y = x$ или $y = 1/\cos x$? Что если y — это полярное расстояние, а x — полярный угол? А если это всё на сфере? «Не так легко освободиться от представления, что координаты имеют прямой метрический смысл». — А. Эйнштейн.

ния, значения которых должны определяться физическим смыслом, и которые могут существенно влиять на математический смысл решения (наличие или отсутствие особенностей). Определить эти константы, не будучи уверенным в физическом смысле координат, мягко говоря, затруднительно.

В таких случаях, которые сплошь и рядом в теоретической физике, решение ищется с конца: с разумной общей, физически понятной картины, от которой с помощью простых уравнений теории отсекается всё лишнее, уточняются детали.

Как может выглядеть интервал двух событий в гравитационном поле центрального тела? Мы знаем, как измерять расстояния и время (а значит и найти интервал ds между двумя событиями) в случае исчезающе слабого гравитационного поля, в рамках специальной теории относительности:

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2. \quad (6.1)$$

Но в этой записи сферическая симметрия не очевидна, она явно выражена в сферических координатах: r , θ и φ — расстояние до центра, зенитный и азимутальный углы:¹⁾

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dr^2 - r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2). \quad (6.2)$$

Здесь принципиальную роль играет координата r , которая так или иначе²⁾ на практике определяется как отношение длины dl дуги окружности к углу $d\varphi$: $r = dl/d\varphi$ — так что длина всей окружности равна $l = 4\pi r$.³⁾ Именно так определяют r и в гравитационном поле (скажем, расстояние до Солнца), поэтому последнее слагаемое в (6.2) должно быть именно таким и в общей картине пока не найденного решения. Про первые же два слагаемых ($c^2 dt^2$ и $-dr^2$) можно сказать лишь то, что они должны быть такими асимптотически при $r \rightarrow \infty$; а при конечных r , как дифференциалы некоторых функций, должны зависеть только от расстояния до центра r . То есть общий вид сферически симметричного интервала таков:

$$ds^2 = c^2 T(r) dt^2 - R(r) dr^2 - r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2). \quad (6.3)$$

Исключительно ради удобства функции T и R представим в виде экспонент: $T(r) = e^{\lambda(r)}$, $R(r) = e^{\nu(r)}$; это также гарантирует, что они являются положительными, хотя тут не всё так просто, как будет видно в конце. Итак,

¹⁾Выражение (6.2) можно получить либо геометрически (введя локальный прямоугольный репер), либо аналитически из (6.1), подставив дифференциалы функций $x = r \sin \theta \cos \varphi$, $y = r \sin \theta \sin \varphi$, $z = r \cos \theta$.

²⁾Будь то паралакс, законы Кеплера (для круговых орбит) или известный опыт Эратосфена по измерению радиуса Земли.

³⁾ $\theta = \pi/2$, при других θ r заменяется на $r \sin \theta$.

решение уравнения Эйнштейна (5.1) начинается с метрики (6.3):

$$g_{ik} = \begin{pmatrix} e^\nu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -e^\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -(r \sin \theta)^2 \end{pmatrix}, \quad g^{ik} = \begin{pmatrix} e^{-\nu} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -e^{-\lambda} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r^{-2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -(r \sin \theta)^{-2} \end{pmatrix}. \quad (7.1)$$

2.1.3 Символы Кристоффеля

Определение символов Кристоффеля по формуле (5.3) с входными данными (7.1) достаточно просто, хотя работы много ($4 \cdot 4 \cdot 4 = 64$ штуки). Жизнь облегчает симметрия символов Кристоффеля по нижним индексам, так что, например, $\Gamma_{12}^3 = \Gamma_{21}^3$. Надо помнить, что по дважды повторяющимся индексам подразумевается сумма.¹⁾ Без этого правила формула (5.3) выглядела бы так:

$$\Gamma_{kl}^i = \frac{1}{2}g^{i0} \left(\frac{\partial g_{k0}}{\partial x^l} + \frac{\partial g_{0l}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{kl}}{\partial x^0} \right) + \frac{1}{2}g^{i1} \left(\frac{\partial g_{k1}}{\partial x^l} + \frac{\partial g_{1l}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{kl}}{\partial x^1} \right) + \\ + \frac{1}{2}g^{i2} \left(\frac{\partial g_{k2}}{\partial x^l} + \frac{\partial g_{2l}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{kl}}{\partial x^2} \right) + \frac{1}{2}g^{i3} \left(\frac{\partial g_{k3}}{\partial x^l} + \frac{\partial g_{3l}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{kl}}{\partial x^3} \right).$$

Вот некоторые символы Кристоффеля:²⁾

$$\Gamma_{10}^0 = \underbrace{\frac{1}{2}g^{0m} \left(\frac{\partial g_{1m}}{\partial x^0} + \frac{\partial g_{m0}}{\partial x^1} - \frac{\partial g_{10}}{\partial x^m} \right)}_{\text{Это сумма по } m, \text{ только } g^{00} \neq 0 \text{ (7.1)}} = \overbrace{\frac{1}{2}g^{00} \left(\frac{\partial g_{10}}{\partial x^0} + \frac{\partial g_{00}}{\partial x^1} - \frac{\partial g_{10}}{\partial x^0} \right)}^{g_{10}=0, g_{00}=e^\nu, g^{00}=e^{-\nu}, x^1 \equiv r} = \\ = \frac{1}{2}e^{-\nu} \cdot e^\nu \frac{\partial \nu}{\partial r} = \frac{1}{2}\nu'.$$

$$\Gamma_{00}^1 = \frac{1}{2}g^{1m} \left(\frac{\partial g_{0m}}{\partial x^0} + \frac{\partial g_{m0}}{\partial x^0} - \frac{\partial g_{00}}{\partial x^m} \right) = \frac{1}{2}g^{11} \left(\frac{\partial g_{10}}{\partial x^0} + \frac{\partial g_{01}}{\partial x^0} - \frac{\partial g_{00}}{\partial x^1} \right) = \\ = \frac{1}{2} \underbrace{(-e^{-\lambda})}_{g^{11}} \cdot \left(-e^\nu \frac{\partial \nu}{\partial r} \right) = \frac{1}{2}\nu' e^{\nu-\lambda}.$$

¹⁾Для тренировки. Здесь есть сумма по i : $y_i x^i$, x_i^2 , $x_i (y^i + z^i)$, $x_i dy_i$. Здесь нет суммы: x_i , x_i^4 , $x^i (y_i^2 + z_i^2)$. Вопрос: как записать $\sum x_i$?

²⁾Штрих означает производную по r : $\nu' = d\nu/dr$. Так как x^i — уже абстрактная координата, то запись $\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^l}$ избыточна. Основное её содержание: производная от g_{ik} по координате номер l , и это можно писать короче: $g_{ik,l}$. Но при наборе этого текста копировать и вставлять было нетрудно ☺.

$$\begin{aligned}\Gamma_{33}^2 &= \frac{1}{2}g^{2m} \left(\frac{\partial g_{3m}}{\partial x^3} + \frac{\partial g_{m3}}{\partial x^3} - \frac{\partial g_{33}}{\partial x^m} \right) = \frac{1}{2}g^{22} \left(\frac{\partial g_{32}}{\partial x^0} + \frac{\partial g_{23}}{\partial x^0} - \frac{\partial g_{33}}{\partial x^2} \right) = \\ &= \frac{1}{2} \underbrace{(-r^{-2})}_{g^{22}} \cdot \underbrace{\left(r^2 \frac{\partial \sin^2 \theta}{\partial \theta} \right)}_{-\partial g_{33}/\partial x^2} = -\sin \theta \cos \theta.\end{aligned}$$

$$\Gamma_{20}^0 = \frac{1}{2}g^{0m} \left(\frac{\partial g_{2m}}{\partial x^0} + \frac{\partial g_{m0}}{\partial x^2} - \frac{\partial g_{20}}{\partial x^m} \right) = \frac{1}{2}g^{00} \left(\frac{\partial g_{20}}{\partial x^0} + \frac{\partial g_{00}}{\partial x^2} - \frac{\partial g_{20}}{\partial x^0} \right) = 0.$$

Остальные символы Кристоффеля вычисляются аналогично. Как уже отмечалось, это просто, но долго и чревато глупыми ошибками. Для контроля и ускорения можно воспользоваться свободной программой «Мáксима» [10–12] (см. приложение на с. 24). Вот все символы Кристоффеля, которые отличны от нуля, при определении тензора Риччи их удобно иметь перед глазами:

$$\begin{aligned}\Gamma_{10}^0 &= \Gamma_{01}^0 = \frac{\nu'}{2}, \\ \Gamma_{00}^1 &= \frac{\nu'}{2} e^{\nu-\lambda}, \quad \Gamma_{11}^1 = \frac{\lambda'}{2}, \quad \Gamma_{22}^1 = -r e^{-\lambda}, \quad \Gamma_{33}^1 = -r \sin^2 \theta e^{-\lambda}, \\ \Gamma_{12}^2 &= \Gamma_{21}^2 = \frac{1}{r}, \quad \Gamma_{33}^2 = -\sin \theta \cos \theta, \\ \Gamma_{13}^3 &= \Gamma_{31}^3 = \frac{1}{r}, \quad \Gamma_{23}^3 = \Gamma_{32}^3 = \operatorname{ctg} \theta.\end{aligned}\quad (8.1)$$

2.1.4 Тензор Риччи

С тензором Риччи (5.2) приходится возиться больше. Если с первыми двумя слагаемыми довольно легко обращаться (в них сумма по одному индексу), то третье и, особенно, четвёртое (суммы по двум индексам) способны завести ум за разум. Чтобы этого не произошло, сто́ит выписать выражение

для тензора Риччи явно, не прибегая к правилу суммирования:

$$\begin{aligned}
R_{ik} = & \frac{\partial \Gamma_{ik}^0}{\partial x^0} + \frac{\partial \Gamma_{ik}^1}{\partial x^1} + \frac{\partial \Gamma_{ik}^2}{\partial x^2} + \frac{\partial \Gamma_{ik}^3}{\partial x^3} - \\
& - \frac{\partial}{\partial x^k} (\Gamma_{i0}^0 + \Gamma_{i1}^1 + \Gamma_{i2}^2 + \Gamma_{i3}^3) + \\
& + \Gamma_{ik}^0 (\Gamma_{00}^0 + \Gamma_{01}^1 + \Gamma_{02}^2 + \Gamma_{03}^3) + \Gamma_{ik}^1 (\Gamma_{10}^0 + \Gamma_{11}^1 + \Gamma_{12}^2 + \Gamma_{13}^3) + \\
& + \Gamma_{ik}^2 (\Gamma_{20}^0 + \Gamma_{21}^1 + \Gamma_{22}^2 + \Gamma_{23}^3) + \Gamma_{ik}^3 (\Gamma_{30}^0 + \Gamma_{31}^1 + \Gamma_{32}^2 + \Gamma_{33}^3) - \\
& - \Gamma_{i0}^0 \Gamma_{k0}^0 - \Gamma_{i0}^1 \Gamma_{k1}^0 - \Gamma_{i0}^2 \Gamma_{k2}^0 - \Gamma_{i0}^3 \Gamma_{k3}^0 - \\
& - \Gamma_{i1}^0 \Gamma_{k0}^1 - \Gamma_{i1}^1 \Gamma_{k1}^1 - \Gamma_{i1}^2 \Gamma_{k2}^1 - \Gamma_{i1}^3 \Gamma_{k3}^1 - \\
& - \Gamma_{i2}^0 \Gamma_{k0}^2 - \Gamma_{i2}^1 \Gamma_{k1}^2 - \Gamma_{i2}^2 \Gamma_{k2}^2 - \Gamma_{i2}^3 \Gamma_{k3}^2 - \\
& - \Gamma_{i3}^0 \Gamma_{k0}^3 - \Gamma_{i3}^1 \Gamma_{k1}^3 - \Gamma_{i3}^2 \Gamma_{k2}^3 - \Gamma_{i3}^3 \Gamma_{k3}^3.
\end{aligned} \tag{9.1}$$

Определение компонент тензора Риччи сводится к вычёркиванию из (9.1) символов Кристоффеля, отсутствующих в (8.1). Также надо помнить, что только производные по $x^1 \equiv r$ и по $x^2 \equiv \theta$ отличны от нуля.¹⁾ Как и в случае символов Кристоффеля, математика здесь проста, но её много, и компьютер справится лучше (по крайней мере, быстрее; см. приложения на с. 24). Ниже приведено несколько примеров.²⁾

$$\begin{aligned}
R_{00} = & \frac{\partial \Gamma_{00}^1}{\partial x^1} + \Gamma_{00}^1 (\Gamma_{10}^0 + \Gamma_{11}^1 + \Gamma_{12}^2 + \Gamma_{13}^3) - \Gamma_{00}^1 \Gamma_{01}^0 - \Gamma_{01}^0 \Gamma_{00}^1 = \\
= & \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\nu'}{2} e^{\nu-\lambda} \right) + \frac{\nu'}{2} e^{\nu-\lambda} \left(\frac{\nu'}{2} + \frac{\lambda'}{2} + \frac{1}{r} + \frac{1}{r} \right) - \frac{\nu'^2}{4} e^{\nu-\lambda} - \frac{\nu'^2}{4} e^{\nu-\lambda} = \\
= & \frac{\nu''}{2} e^{\nu-\lambda} + \frac{\nu'^2}{4} e^{\nu-\lambda} - \frac{\nu' \lambda'}{4} e^{\nu-\lambda} + \frac{\nu'}{r} e^{\nu-\lambda}.
\end{aligned}$$

¹⁾И по $x^0 \equiv ct$, если учитывать возможную зависимость от времени.

²⁾Следует обратить внимание на размерность: складываются только однородные величины. Как и ранее, штрих означает производную по $x^1 \equiv r$.

$$\begin{aligned}
R_{33} &= \frac{\partial \Gamma_{33}^1}{\partial x^1} + \frac{\partial \Gamma_{33}^2}{\partial x^2} + \Gamma_{33}^1 (\Gamma_{10}^0 + \Gamma_{11}^1 + \Gamma_{12}^2 + \Gamma_{13}^3) + \Gamma_{33}^2 \Gamma_{23}^3 - \\
&\quad - \Gamma_{31}^3 \Gamma_{33}^1 - \Gamma_{32}^3 \Gamma_{33}^2 - \Gamma_{33}^1 \Gamma_{31}^3 - \Gamma_{33}^2 \Gamma_{32}^3 = \\
&= \underbrace{-\sin^2 \theta e^{-\lambda} + r \sin^2 \theta e^{-\lambda} \lambda'}_{\partial \Gamma_{33}^1 / \partial x^1} - \underbrace{(\cos^2 \theta - \sin^2 \theta)}_{\partial \Gamma_{33}^2 / \partial x^2} - \\
&\quad - r \sin^2 \theta e^{-\lambda} \left(\frac{\nu'}{2} + \frac{\lambda'}{2} + \frac{1}{r} + \frac{1}{r} \right) \underbrace{- \sin \theta \cos \theta \operatorname{ctg} \theta}_{\Gamma_{33}^2 \Gamma_{23}^3} + \\
&\quad + \frac{1}{r} \cdot r \sin^2 \theta e^{-\lambda} + \operatorname{ctg} \theta \sin \theta \cos \theta + r \sin^2 \theta e^{-\lambda} \frac{1}{r} + \sin \theta \cos \theta \operatorname{ctg} \theta = \\
&= \sin^2 \theta + e^{-\lambda} \left(r \cdot \frac{\lambda' - \nu'}{2} - 1 \right) \sin^2 \theta.
\end{aligned}$$

$$R_{12} = \Gamma_{12}^2 \Gamma_{23}^3 - \Gamma_{13}^3 \Gamma_{23}^3 = \frac{1}{r} \operatorname{ctg} \theta - \frac{1}{r} \operatorname{ctg} \theta = 0.$$

Отличны от нуля только четыре компоненты тензора Риччи:¹⁾

$$\begin{aligned}
R_{00} &= \frac{\nu''}{2} e^{\nu-\lambda} + \frac{\nu'^2}{4} e^{\nu-\lambda} - \frac{\nu' \lambda'}{4} e^{\nu-\lambda} + \frac{\nu'}{r} e^{\nu-\lambda}, \\
R_{11} &= \frac{\lambda'}{r} - \frac{\nu''}{2} - \frac{\nu'^2}{4} + \frac{\lambda' \nu'}{4}, \\
R_{22} &= 1 + \left(r \cdot \frac{\lambda' - \nu'}{2} - 1 \right) e^{-\lambda}, \\
R_{33} &= \sin^2 \theta + e^{-\lambda} \left(r \cdot \frac{\lambda' - \nu'}{2} - 1 \right) \sin^2 \theta.
\end{aligned} \tag{10.1}$$

2.1.5 Дифференциальные уравнения

Теперь можно подставлять найденные компоненты тензора Риччи (10.1) в уравнение Эйнштейна (5.1). Так как решение ищется в пустоте, окружающей центральное тело, то тензор энергии-импульса T_{ik} равен нулю, и уравнение (5.1) выглядит так: $R_{ik} - \frac{1}{2} g_{ik} R = 0$. Это уравнение равносильно более простому $R_{ik} = 0$,²⁾ так что остаётся только приравнять все компонен-

¹⁾И все они диагональные. Можно ли было это предвидеть заранее?

²⁾Если $R_{ik} = 0$, то, очевидно, и $R_{ik} - \frac{1}{2} g_{ik} R = 0$. Обратно, если $R_{ik} - \frac{1}{2} g_{ik} R = 0$, то $g^{ik} R_{ik} - \frac{1}{2} g^{ik} g_{ik} R = R - 2R = 0$ — отсюда $R = 0$, и следовательно $R_{ik} = 0$. Вообще говоря, $R \equiv R_i^i = g^{ik} R_{ik} \neq 0$ [см. формулы (7.1) и (10.1)]. Равенство нулю достигается определённым выбором функций λ и ν — в этом и заключается суть решения.

ты (10.1) к нулю и решать систему ($R_{22} = 0$ и $R_{33} = 0$ эквивалентны):

$$\begin{aligned} \frac{\nu''}{2} + \frac{\nu'^2}{4} - \frac{\nu'\lambda'}{4} + \frac{\nu'}{r} &= 0, \\ \frac{\lambda'}{r} - \frac{\nu''}{2} - \frac{\nu'^2}{4} + \frac{\lambda'\nu'}{4} &= 0, \\ 1 + \left(r \cdot \frac{\lambda' - \nu'}{2} - 1 \right) e^{-\lambda} &= 0. \end{aligned} \quad (11.1)$$

Сложение первых двух уравнений в (11.1) даёт $\nu' = -\lambda'$, а подстановка этого в третье уравнение приводит к простому дифференциальному уравнению $1 + (r\lambda' - 1)e^{-\lambda} = 0$. Разглядев в нём производную от произведения $(re^{-\lambda})'$, получаем $(re^{-\lambda})' = 1$, откуда

$$e^{-\lambda} = 1 + \frac{A}{r}, \quad (11.2)$$

где A — константа интегрирования. Сам вид функции λ не нужен, так как она входит в метрический тензор (7.1) только в виде экспоненты. Так как $\nu' = -\lambda'$, то $\nu = -\lambda + B$ (B — константа интегрирования) и

$$e^\nu = \left(1 + \frac{A}{r} \right) e^B. \quad (11.3)$$

Теперь можно записать выражение для интервала [см. (7.1)]:

$$ds^2 = \left(1 + \frac{A}{r} \right) e^B c^2 dt^2 - \frac{dr^2}{1 + \frac{A}{r}} - r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) \quad (11.4)$$

2.1.6 Предельный переход к классике

Константы A и B в (11.4) можно определить руководствуясь *принципом соответствия*:¹⁾ в слабом гравитационном поле (на больших расстояниях от центра, $r \rightarrow \infty$) должна работать специальная теория относительности, а при небольших скоростях (по сравнению со скоростью света c) ещё и классическая механика.

Если пробная частица покоится вдалеке от центрального тела, то её интервал $ds^2 = c^2 dt^2$, поэтому в (11.4) надо положить $B = 0$.

¹⁾Принцип соответствия: любая новая научная теория при наличии старой, хорошо проверенной, даёт те же следствия в некотором предельном приближении (частном случае). Это даёт возможность «оставаться на плаву» не углубляясь в смысл вещей, а останавливаясь только на их отношениях: непонятно, что такое масса, время или расстояние, зато понятно, как они связаны — и можно двигаться дальше.

Если же пробная частица находится на большом расстоянии r от центрального тела и движется с небольшой скоростью $v \ll c$, то её «классическая» энергия:

$$\mathcal{E} = \frac{mv^2}{2} - \frac{GMm}{r}. \quad (12.1)$$

где m — масса пробной частицы, v — её скорость. С другой стороны, релятивистская энергия определяется как $E = mc^2 \frac{dx^0}{ds}$, [8, § 9] где $dx^0 = c dt$, поэтому из (11.4) получается вынесением $c^2 dt^2$ за скобки:

$$ds^2 = \left[\left(1 + \frac{A}{r}\right) - \frac{1}{c^2} \left(v_\theta^2 + v_\varphi^2 + \frac{v_r^2}{1 + \frac{A}{r}}\right) \right] c^2 dt^2, \quad (12.2)$$

где $v_\theta = r^2 d\theta/dt$, $v_\varphi = r^2 \sin \theta d\varphi/dt$, $v_r = dr/dt$, так что $v = \sqrt{v_\theta^2 + v_\varphi^2 + v_r^2}$. С учётом того, что $v \ll c$ и $1/r \rightarrow 0$ из (12.2) получается:¹⁾

$$E = mc^2 \frac{c dt}{ds} = mc^2 + \frac{mv^2}{2} + \frac{Amc^2}{2r}. \quad (12.3)$$

Сравнение (12.3) с (12.1) помимо постоянной «энергии покоя» mc^2 показывает, что $A = -2GM/c^2$. Величину $r_g = 2GM/c^2$ называют *гравитационным радиусом*. Например, для Солнца гравитационный радиус равен $2 \cdot 6,673 \cdot 10^{-11} \cdot 1,989 \cdot 10^{30} / 299792458^2 = 2,953$ км, а для Земли (масса $5,977 \cdot 10^{24}$ кг) — 8,876 мм. Окончательное решение Шварцшильда²⁾ имеет вид:

$$ds^2 = \left(1 - \frac{r_g}{r}\right) c^2 dt^2 - \frac{dr^2}{1 - \frac{r_g}{r}} - r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) \quad \left(r_g = \frac{2GM}{c^2}\right) \quad (12.4)$$

2.2 Уравнения движения в центральном поле

Теория относительности формулируется на языке 4-мерного пространства-времени — так она выглядит стройнее. Но для убедительного сравнения эксперимента с предсказаниями теории, её результаты должны быть выражены на языке 3-мерного пространства и времени (отдельно).

Общий вид уравнений движения [8, § 85], [13, п. 2.3]:

$$\frac{d^2 x^i}{ds^2} + \Gamma_{kl}^i \frac{dx^k}{ds} \frac{dx^l}{ds} = 0, \quad (12.5)$$

где $x^0 \equiv ct$, $x^1 \equiv r$, $x^2 \equiv \theta$, $x^3 \equiv \varphi$ — временная и сферические координаты, ds — интервал двух положений движущегося тела (равный также $c d\tau$,

¹⁾ $\frac{1}{1+\alpha} \approx 1 - \alpha$, $\sqrt{1+\alpha} \approx 1 + \alpha/2$ при $\alpha \rightarrow 0$.

²⁾ Карл Шварцшильд (1873–1916) — немецкий астроном и физик.

где τ — собственное время тела), Γ_{kl}^i — символы Кристоффеля, определённые в решении Шварцшильда (8.1).

Траектория движения математически суть зависимость $x^1 \equiv r$ от $x^3 \equiv \varphi$, при этом движение рассматриваем в плоскости $x^2 \equiv \theta = \pi/2$ (т. о. $u^2 = dx^2/ds = 0$). Так как в уравнениях движения координаты «перепутаны», то необходимо несколько уравнений.

Уравнение для $x^0 \equiv ct$:

$$\frac{d^2x^0}{ds^2} + \Gamma_{01}^0 \frac{dx^0}{ds} \frac{dx^1}{ds} + \Gamma_{10}^0 \frac{dx^1}{ds} \frac{dx^0}{ds} = 0, \quad (13.1)$$

остальные слагаемые равны нулю либо из-за $\Gamma_{kl}^i = 0$, либо из-за $dx^2/ds = 0$. Хотя соответствующие символы Кристоффеля известны, для решения уравнения удобнее их записать снова, учитывая, что тензор g_{ik} диагонален, и g^{ik} обратен к нему:

$$\Gamma_{10}^0 = \Gamma_{01}^0 = \frac{1}{2}g^{0m} \left(\frac{\partial g_{m0}}{\partial x^1} + \frac{\partial g_{1m}}{\partial x^0} - \frac{\partial g_{01}}{\partial x^m} \right) = \frac{1}{2}g^{00} \frac{\partial g_{00}}{\partial x^1} = \frac{1}{2g_{00}} \frac{\partial g_{00}}{\partial x^1}.$$

Подстановка этих величин в уравнение (13.1) с учётом¹⁾ того, что $\frac{\partial g_{00}}{\partial x^1} \frac{dx^1}{ds} = \frac{dg_{00}}{ds}$ даёт:

$$c \frac{d^2t}{ds^2} + c \frac{1}{g^{00}} \frac{dg_{00}}{ds} \frac{dt}{ds} = 0.$$

Это дифференциальное уравнение первого порядка (относительно dt/ds) с разделяющимися переменными. Его решение есть

$$g_{00}c \frac{dt}{ds} \equiv \left(1 - \frac{r_g}{r}\right) c \frac{dt}{ds} = A = \text{const}, \quad (13.2)$$

где r_g — гравитационный радиус центрального тела (12.4). Это равенство выражает закон сохранения энергии $E = g_{00}mc^2u^0$, так что $A = E/mc^2$.

Уравнение для $x^3 \equiv \varphi$:

$$\frac{d^2x^3}{ds^2} + \Gamma_{13}^3 \frac{dx^1}{ds} \frac{dx^3}{ds} + \Gamma_{31}^3 \frac{dx^3}{ds} \frac{dx^1}{ds} = 0,$$

$$\frac{d^2\varphi}{ds^2} + \frac{2}{r} \frac{dr}{ds} \frac{d\varphi}{ds} = 0.$$

Это дифференциальное уравнение первого порядка (относительно $d\varphi/ds$) с разделяющимися переменными. Его решение есть

$$r^2 \frac{d\varphi}{ds} = B = \text{const}. \quad (13.3)$$

¹⁾ g_{00} зависит только от x^1 .

Это равенство выражает закон сохранения момента импульса $L = mr^2 d\varphi/d\tau$, так что $B = L/mc$.

Полученные уравнения (13.2, 13.3) связывают три функции: $t(s)$, $\varphi(s)$ и $r(s)$ — для полного определения которых необходимо ещё одно уравнение. Это может быть уравнение движения для $x^1 \equiv r$, но проще воспользоваться связью компонент 4-скорости $g_{ik}u^i u^k = 1$, где $u^i = dx^i/ds$:¹⁾

$$g_{00} \left(\frac{dx^0}{ds} \right)^2 + g_{11} \left(\frac{dx^1}{ds} \right)^2 + g_{33} \left(\frac{dx^3}{ds} \right)^2 = 1,$$

$$\left(1 - \frac{r_g}{r} \right) \left(c \frac{dt}{ds} \right)^2 - \left(1 - \frac{r_g}{r} \right)^{-1} \left(\frac{dr}{ds} \right)^2 - r^2 \left(\frac{d\varphi}{ds} \right)^2 = 1. \quad (14.1)$$

Система трёх уравнений (13.2, 13.3, 14.1) решается следующим образом. В первую очередь исключается производная dt/ds из последнего уравнения с помощью уравнения (13.2):

$$\left(1 - \frac{r_g}{r} \right)^{-1} A^2 - \left(1 - \frac{r_g}{r} \right)^{-1} \left(\frac{dr}{ds} \right)^2 - r^2 \left(\frac{d\varphi}{ds} \right)^2 = 1.$$

Умножение этого уравнения на $\left(1 - \frac{r_g}{r} \right)$ и перегруппировка его членов приводят к уравнению

$$\left(\frac{dr}{ds} \right)^2 + r^2 \left(\frac{d\varphi}{ds} \right)^2 - \frac{r_g}{r} = A^2 - 1 + r r_g \left(\frac{d\varphi}{ds} \right)^2.$$

Деление полученного уравнения на квадрат производной $(d\varphi/ds)^2$ с учётом равенств $\frac{d\varphi}{ds} \frac{ds}{d\varphi} = 1$, $\frac{dr}{ds} \frac{ds}{d\varphi} = \frac{dr}{d\varphi}$ и $ds/d\varphi = r^2/B$ (уравнение 13.3) даёт:

$$\left(\frac{dr}{d\varphi} \right)^2 + r^2 - \frac{r_g}{r} \frac{r^4}{B^2} = \frac{A^2}{B^2} r^4 - \frac{1}{B^2} r^4 + r r_g,$$

$$\left(\frac{dr}{d\varphi} \right)^2 + r^2 - \frac{r_g}{B^2} r^3 = (A^2 - 1) \frac{r^4}{B^2} + r r_g.$$

Удобно перейти к новой функции $\sigma = 1/r$, так что $dr/d\varphi = -\sigma^{-2} d\sigma/d\varphi$:

$$\sigma^{-4} \left(\frac{d\sigma}{d\varphi} \right)^2 + \sigma^{-2} - \frac{r_g}{B^2} \sigma^{-3} = (A^2 - 1) \frac{\sigma^{-4}}{B^2} + \sigma^{-1} r_g,$$

$$\left(\frac{d\sigma}{d\varphi} \right)^2 + \sigma^2 - \frac{r_g}{B^2} \sigma = (A^2 - 1) \frac{1}{B^2} + \sigma^3 r_g.$$

¹⁾ $g_{33} = -r^2 \sin^2 \theta = -r^2$, так как $\theta = \pi/2$.

Дифференцирование по φ приводит к более обозримому уравнению второго порядка:

$$2 \frac{d\sigma}{d\varphi} \frac{d^2\sigma}{d\varphi^2} + 2\sigma \frac{d\sigma}{d\varphi} - \frac{r_g}{B^2} \frac{d\sigma}{d\varphi} = 3\sigma^2 \frac{d\sigma}{d\varphi} r_g,$$

$$2 \frac{d^2\sigma}{d\varphi^2} + 2\sigma = \frac{r_g}{B^2} + 3\sigma^2 r_g,$$

$$\frac{d^2\sigma}{d\varphi^2} + \sigma = \frac{GM}{B^2 c^2} (1 + 3B^2 \sigma^2) \quad (\sigma = 1/r). \quad (15.1)$$

Случай $\sigma = \text{const}$, находится среди решений уравнения (15.1). В итоге задача (поиск траектории) полностью сводится к решению этого уравнения.

2.3 Вращение орбит тел Солнечной системы

Орбитальное движение небесных тел подвержено возмущающему действию со стороны других тел (например, соседних планет), в результате которого орбита становится незамкнутой — не эллиптической. Приблизённо это выглядит так, как будто эллипс орбиты медленно поворачивается (*прецессирует*)¹⁾. Однако у некоторых небесных тел наблюдаемая скорость вращения орбиты *немного больше* той, которая может быть вызвана влиянием всех других тел. Это означает, что даже при отсутствии возмущающего влияния других небесных тел, вытянутая орбита должна поворачиваться. Классические законы Ньютона ничего подобного не допускают [7, §15]. Больше всего шума в истории астрономии и механике наделал Меркурий [15], и общая теория относительности была первой согласующейся с опытом теорией, позволившей решить проблему *аномального*²⁾ движения Меркурия. Это решение заключено в уравнении движения (15.1) и излагается далее.³⁾

Так как тела Солнечной системы движутся с достаточно малыми скоростями, то можно полагать $ds \approx c dt$ и $B = L/mc \approx \dot{\varphi} r^2/c$. С помощью уравнения (13.3) легко убедиться,⁴⁾ что $3B^2 \sigma^2 \approx (\dot{\varphi} r)^2/c^2 \ll 1$. Таким образом, второе слагаемое в правой части уравнения движения (15.1) суть малая релятивистская поправка, поэтому решение разумно искать путём последовательных приближений. Пусть для краткости $h = \frac{GM}{B^2 c^2} = \frac{GMm^2}{L^2}$

¹⁾См. симуляцию «*My Solar System*» на сайте <http://phet.colorado.edu/>. Пытливый ум сможет смоделировать подобное и в симуляции «*Electric Field Hockey*» [14].

²⁾Аномальный — означает отклоняющийся от предсказаний имеющейся теории. Серьёзные аномалии приводят к опровержению теории, особенно если существует конкурирующая теория, которая хорошо согласуется с экспериментом.

³⁾Интересно также классическим способом учесть релятивистскую поправку к энергии [13, § 6.3].

⁴⁾Орбитальная скорость $\dot{\varphi} r$ Меркурия — 47,87 км/с, Венеры — 35,02 км/с, Земли — 29,79 км/с.

и $\lambda = 3B^2 = 3L^2/m^2c^2$, тогда уравнение (15.1) превращается в

$$\sigma'' + \sigma = h(1 + \lambda\sigma^2), \quad (\lambda\sigma^2 \ll 1). \quad (16.1)$$

В нулевом приближении, если выкинуть $\lambda\sigma^2$, оно выглядит как

$$\sigma'' + \sigma = h, \quad (16.2)$$

и его решение σ_0 становится очевидным, если записать $(\sigma - h)'' + (\sigma - h) = 0$:

$$\sigma_0(\varphi) = h + C_1 \cos \varphi + C_2 \sin \varphi = h[1 + \varepsilon \cos(\varphi - \varphi_0)], \quad (16.3)$$

где $C_1, C_2, \varepsilon = h^{-1}\sqrt{C_1^2 + C_2^2}$ и $\varphi_0 = \text{arctg}(C_2/C_1)$ — постоянные интегрирования. Так как $\sigma = 1/r$, то это уравнение эллипса, у которого большая полуось образует угол φ_0 с полярной осью.

В первом приближении решение уравнения (16.1) ищется в виде $\sigma = \sigma_0 + \sigma_1$, причём $\sigma_1 \rightarrow 0$ вместе с $\lambda \rightarrow 0$:

$$\sigma_0'' + \sigma_1'' + \sigma_0 + \sigma_1 = h + h\lambda(\sigma_0 + \sigma_1)^2.$$

Так как σ_0 — решение уравнения (16.2) и $\lambda\sigma_0\sigma_1$ и $\lambda\sigma_1^2$ — малые высших порядков, то

$$\sigma_1'' + \sigma_1 = h\lambda\sigma_0^2.$$

Подстановка найденного решение σ_0 нулевого приближения даёт

$$\begin{aligned} \sigma_1'' + \sigma_1 &= h^3\lambda[1 + \varepsilon \cos(\varphi - \varphi_0)]^2 = \\ &= h^3\lambda[1 + 2\varepsilon \cos(\varphi - \varphi_0) + \varepsilon^2 \cos^2(\varphi - \varphi_0)] = \\ &= h^3\lambda\left[1 + \frac{\varepsilon^2}{2} + 2\varepsilon \cos(\varphi - \varphi_0) + \frac{\varepsilon^2}{2} \cos 2(\varphi - \varphi_0)\right]. \end{aligned} \quad (16.4)$$

Очевидно, решение этого уравнения $\sigma_1 = \sigma_{11} + \sigma_{12} + \sigma_{13}$ является суммой решений трёх уравнений [16, гл. IX, §12]:

$$\begin{aligned} \sigma_{11}'' + \sigma_{11} &= h^3\lambda \left(1 + \frac{\varepsilon^2}{2}\right), \\ \sigma_{12}'' + \sigma_{12} &= 2h^3\lambda\varepsilon \cos(\varphi - \varphi_0), \\ \sigma_{13}'' + \sigma_{13} &= h^3\lambda\frac{\varepsilon^2}{2} \cos 2(\varphi - \varphi_0). \end{aligned}$$

Частные решения этих уравнений:

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= h^3\lambda \left(1 + \frac{\varepsilon^2}{2}\right) = \text{const}, \\ \sigma_{12} &= h^3\lambda\varepsilon(\varphi - \varphi_0) \sin(\varphi - \varphi_0), \\ \sigma_{13} &= -h^3\lambda\frac{\varepsilon^2}{6} \cos 2(\varphi - \varphi_0). \end{aligned}$$

Общее решение исходного уравнения (16.1) (с точностью до членов первого порядка по $\lambda\sigma^2$) равно $\sigma = \sigma_0 + \sigma_1 = \sigma_0 + \sigma_{11} + \sigma_{12} + \sigma_{13}$:

$$\begin{aligned} \sigma = \frac{1}{r} &= h[1 + \varepsilon \cos(\varphi - \varphi_0)] + h^3\lambda \left(1 + \frac{\varepsilon^2}{2}\right) + \\ &+ h^3\lambda\varepsilon(\varphi - \varphi_0) \sin(\varphi - \varphi_0) - h^3\lambda\frac{\varepsilon^2}{6} \cos 2(\varphi - \varphi_0) = \\ &= h \left\{1 + \varepsilon [\cos(\varphi - \varphi_0) + h^2\lambda(\varphi - \varphi_0) \sin(\varphi - \varphi_0)]\right\} + \\ &+ h^3\lambda \left(1 + \frac{\varepsilon^2}{2}\right) - h^3\lambda\frac{\varepsilon^2}{6} \cos 2(\varphi - \varphi_0). \end{aligned} \quad (17.1)$$

Это непериодическое решение из-за второго члена в квадратных скобках. В этих скобках $h^2\lambda = \frac{3M^2G^2}{B^2c^4} = 3 \left(\frac{GMm}{Lc}\right)^2 = 3 \left(\frac{GM}{vrc}\right)^2$, где v , r , m — орбитальная скорость, радиус орбиты и масса тела.¹⁾ Оценка этой величины, например для Меркурия, со средним расстоянием от Солнца $r = 5,8 \cdot 10^{10}$ м и средней скоростью $v = 47870$ м/с даёт величину $h^2\lambda \approx 7,63 \cdot 10^{-8}$. Даже после тысячи оборотов по орбите угол $h^2\lambda(\varphi - \varphi_0) \approx 4,8 \cdot 10^{-4} \ll 1$. Поэтому выражение в квадратных скобках можно для уяснения физического смысла преобразовать по формуле косинуса разности $\cos(\varphi - \delta\varphi) \approx \cos \varphi + \delta\varphi \sin \varphi$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{r} &= h \left\{1 + \varepsilon \cos(1 - h^2\lambda)(\varphi - \varphi_0)\right\} + h^3\lambda \left(1 + \frac{\varepsilon^2}{2}\right) - h^3\lambda\frac{\varepsilon^2}{6} \cos 2(\varphi - \varphi_0) = \\ &= h \left\{1 + \varepsilon \cos(1 - h^2\lambda)(\varphi - \varphi_0) + h^2\lambda \left(1 + \frac{\varepsilon^2}{2}\right) - h^2\lambda\frac{\varepsilon^2}{6} \cos 2(\varphi - \varphi_0)\right\}. \end{aligned}$$

В этой формуле также видно, что два последних слагаемых могут быть опущены, т. к. $h^2\lambda \ll 1$, и сами эти члены суть малые периодические колебания r . Возвращение к исходным физическим величинам и выбор полярной оси вдоль начального положения главной оси эллипса ($\varphi_0 = 0$) дают окончательное уравнение движения тела

$$\frac{1}{r} = \frac{GMm^2}{L^2} \left\{1 + \varepsilon \cos \left[\varphi - 3 \left(\frac{GMm}{Lc}\right)^2 \varphi \right]\right\}. \quad (17.2)$$

На второй член аргумента косинуса можно посмотреть как на положение главной оси, которая поворачивается, и если планета сделает полный оборот 2π , то ось повернётся на $6\pi \left(\frac{GMm}{Lc}\right)^2$. Можно также потребовать, чтобы минимум r (перигелий) повторялся через 2π , это означает, что $\varphi \cdot \left(1 - 3 \left(\frac{GMm}{Lc}\right)^2\right) = 2\pi$, то есть $\varphi \approx 2\pi \left(1 + 3 \left(\frac{GMm}{Lc}\right)^2\right) > 2\pi$, раз-

¹⁾Строго говоря, это должны быть скорость и расстояние r в перигелии или апоцентре.

ность равна опять же $6\pi \left(\frac{GMm}{Lc}\right)^2$. То есть большая ось эллиптической планетной орбиты после одного оборота планеты по орбите повернётся на угол $6\pi \left(\frac{GMm}{Lc}\right)^2$.

Механическая величина — момент импульса L — может быть выражена через геометрические эксцентриситет ε и большую полуось a орбиты, которыми обычно характеризуют движение небесных тел. Согласно [7, §15] $L^2 = a(1 - \varepsilon^2)GMm^2$, поэтому за один оборот тела по орбите большая ось поворачивается на угол

$$\delta\varphi = 6\pi \frac{GM}{c^2} \frac{1}{a(1 - \varepsilon^2)}. \quad (18.1)$$

Так как это очень малая величина, её выражают в угловых секундах за век, T — период обращения в земных днях:

$$\Delta\varphi = 6\pi \frac{GM}{c^2} \frac{1}{a(1 - \varepsilon^2)} \frac{36500}{T} \cdot 2,0626 \cdot 10^5. \quad (18.2)$$

Расчёты для некоторых планет Солнечной системы выполнены по формуле (18.3) с предварительно вычисленными постоянными множителями и представлены в таблице 18.1.

$$\Delta\varphi = \frac{2,0956 \cdot 10^{14}}{aT(1 - \varepsilon^2)}. \quad (18.3)$$

Таблица 18.1. Вращение орбит. $\Delta\varphi_e$ — разность между наблюдаемым поворотом и предсказанием классической механики, $\Delta\varphi$ — добавка от общей теории относительности (18.3). T , a , ε см. в [17, с. 975], данные наблюдений и комментарии: [18], [6, § 40.5]. Подробную историю Меркурия см. в [15].

Тело	T , дней	a , м	ε	$\Delta\varphi_e$	$\Delta\varphi$
Меркурий	87,969	$57,91 \cdot 10^9$	0,2056	$43,10'' \pm 0,45''$	$42,95''$
Венера	224,701	$108,21 \cdot 10^9$	0,0068	$8,4'' \pm 4,8''$	$8,62''$
Земля	365,256	$149,60 \cdot 10^9$	0,0168	$5'' \pm 1,2''$	$3,84''$
Марс	686,980	$227,90 \cdot 10^9$	0,0933	—	$1,35''$

2.4 Искривление световых лучей в поле Солнца

Уравнение движения света получается из (15.1) при $B = L/mc = \infty$, что соответствует равной нулю массе $m = 0$, а также из $ds = 0$ (ур. 13.3):

$$\frac{d^2\sigma}{d\varphi^2} + \sigma = \frac{3GM}{c^2}\sigma^2 = \frac{3}{2}r_g\sigma^2. \quad (19.1)$$

Величина $3r_g\sigma^2/2 = 3r_g r^{-2}/2$ мала по сравнению с $\sigma = r^{-1}$, поэтому решение опять разумно искать путём последовательных приближений.

В нулевом приближении это будет уравнение

$$\sigma'' + \sigma = 0, \quad (19.2)$$

и его решение:

$$\sigma_0(\varphi) = C_1 \cos \varphi + C_2 \sin \varphi = \cos(\varphi - \varphi_0)/b, \quad (19.3)$$

где $b = (C_1^2 + C_2^2)^{-1/2}$ и $\varphi_0 = \arctg(C_2/C_1)$ — новые постоянные.

Так как $\sigma = 1/r$, то это уравнение прямой, проходящей на расстоянии b от полюса и под углом $\varphi_0 - \pi/2$ к полярной оси (рис. 19.1).

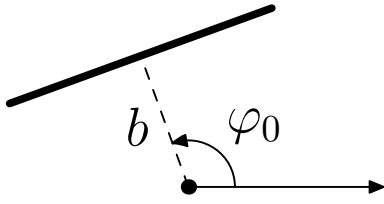


Рис. 19.1. Прямая в полярной системе координат.

В следующем приближении решение уравнения (19.1) ищется в виде $\sigma = \sigma_0 + \sigma_1$, причём $\sigma_1 \rightarrow 0$ вместе с $r_g \rightarrow 0$. Так как σ_0 — решение уравнения (19.2) и $r_g\sigma_0\sigma_1$ и $r_g\sigma_1^2$ — малые высших порядков, то:

$$\sigma_1'' + \sigma_1 = \frac{3}{2}r_g\sigma_0^2,$$

$$\sigma_1'' + \sigma_1 = \frac{3r_g}{2b^2} \cos^2(\varphi - \varphi_0),$$

$$\sigma_1'' + \sigma_1 = \frac{3r_g}{4b^2} + \frac{3r_g}{4b^2} \cos 2(\varphi - \varphi_0).$$

Частное решение этого уравнения [16, гл. IX, §12]:

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= \frac{3r_g}{4b^2} - \frac{3r_g}{12b^2} \cos 2(\varphi - \varphi_0) = \frac{2r_g}{4b^2} + \frac{3r_g}{12b^2} [1 - \cos 2(\varphi - \varphi_0)] = \\ &= \frac{2r_g}{4b^2} + \frac{3r_g}{6b^2} \sin^2(\varphi - \varphi_0) = \frac{r_g}{2b^2} [1 + \sin^2(\varphi - \varphi_0)]. \end{aligned} \quad (19.4)$$

Итого полное решение $r^{-1} = \sigma = \sigma_0 + \sigma_1$:

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{b} \cos(\varphi - \varphi_0) + \frac{r_g}{2b^2} [1 + \sin^2(\varphi - \varphi_0)]. \quad (19.5)$$

Функция (19.3) нулевого приближения имеет асимптоты при $\varphi - \varphi_0 = \pm\pi/2$, то есть при этих углах $r = \infty$. Для первого приближения (19.5) это не так: траектория уходит в бесконечность при бóльших по величине углах $\varphi - \varphi_0 = \pm(\pi/2 + \delta)$, когда правая часть равенства (19.5) обращается в ноль; при этом отрицательное значение косинуса компенсирует малое второе слагаемое. Малая добавка δ (она должна быть малой, так как $r_g/2b^2$ малó, и, следовательно, косинус мало отличается от нуля) определяется уравнением $r = \infty$, и из (19.5) получается:

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{1}{b} \cos \left[\pm \left(\frac{\pi}{2} + \delta \right) \right] + \frac{r_g}{2b^2} \left\{ 1 + \sin^2 \left[\pm \left(\frac{\pi}{2} + \delta \right) \right] \right\} = \\ &= \frac{1}{b} \cos \left(\frac{\pi}{2} + \delta \right) + \frac{r_g}{2b^2} \left[1 + \sin^2 \left(\frac{\pi}{2} + \delta \right) \right] = \\ &= -\frac{1}{b} \sin \delta + \frac{r_g}{2b^2} [1 + \cos^2 \delta] \approx -\frac{\delta}{b} + \frac{r_g}{b^2}. \end{aligned}$$

Следовательно $\delta = r_g/b$. Очевидно, угол отклонения луча равен 2δ :

$$\theta = \frac{2r_g}{b} = \frac{4GM}{c^2 b}. \quad (20.1)$$

Численный расчёт для Солнца радиусом $R = 6,96 \cdot 10^8$ м даёт

$$\theta = \frac{5906,8053}{b} = \frac{5906,8053/R}{b/R} = \frac{8,4870 \cdot 10^{-6}}{b/R} = \frac{1,75''}{b/R}.$$

Для луча, проходящего вблизи поверхности Солнца, $\theta = 1,75''$. Первые успешные наблюдения отклонения световых лучей были произведены во время солнечного затмения¹⁾ в 1919 г. в двух разных пунктах и привели соответственно к значениям $1,98 \pm 0,18$ и $1,69 \pm 0,45$ [19, 20]²⁾. Другие результаты приведены в таблице 20.1.

Таблица 20.1. Отклонение световых лучей в поле Солнца

Год	1919	1919	1922	1922	1929	1936	1947	1952
θ''	$1,98 \pm 0,18$	$1,61 \pm 0,45$	$1,78 \pm 0,17$	1,77	2,24	$2,73 \pm 0,31$	$2,01 \pm 0,27$	$1,70 \pm 0,10$

На рисунке 21.1 в сильно преувеличенном виде изображена траектория света в центральном поле. Параметр b по-прежнему имеет смысл прицельного расстояния, но уже не является кратчайшим расстоянием до центра. В центральном поле это расстояние равно $2b^2/(2b + r_g) \approx b - r_g/2$,

¹⁾Затмение надо, чтобы свет звезды не блек на фоне Солнца и свечения атмосферы Земли; ночью Солнца нет, но нет и наблюдаемого на Земле отклонения.

²⁾В статьях [19] и [20] наблюдается расхождение во втором числе: 1,69 и 1,61 соответственно.

в чём нетрудно убедиться исследованием функции (19.5) на максимум.¹⁾ Таким образом, луч света отклоняется к Солнцу от первоначального направления. С точки зрения земного наблюдателя изображение звезды смещается от Солнца [6, доп. 1.6 и 40.1].

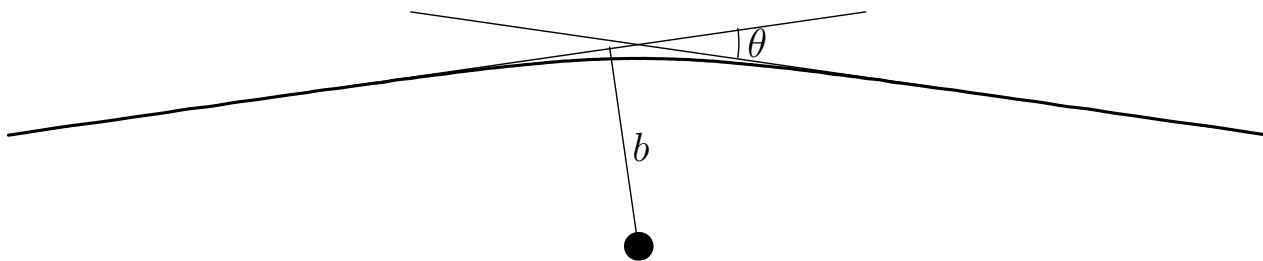


Рис. 21.1. Отклонение светового луча в центральном поле.

2.5 Гравитационная задержка сигнала

Общая теория относительности предсказывает также эффект задержки сигнала в гравитационном поле: в поле тяготения электромагнитные сигналы идут дольше, чем в отсутствие этого поля (*эффект Шапиро*). Предсказываемая задержка сигнала исторически стала четвёртой²⁾ возможностью проверить правильность общей теории относительности [21].

В виду малого отклонения (20.1) луча в поле Солнца, путь луча можно считать прямым. Положение на этой прямой будем описывать величиной x (рис. 21.2). Координата x связана со Шварцшильдской координатой r очевидными формулами $|d\mathbf{r}| = dx$, $dr = \mathbf{r} d\mathbf{r}/r = x dx/r$. С помощью

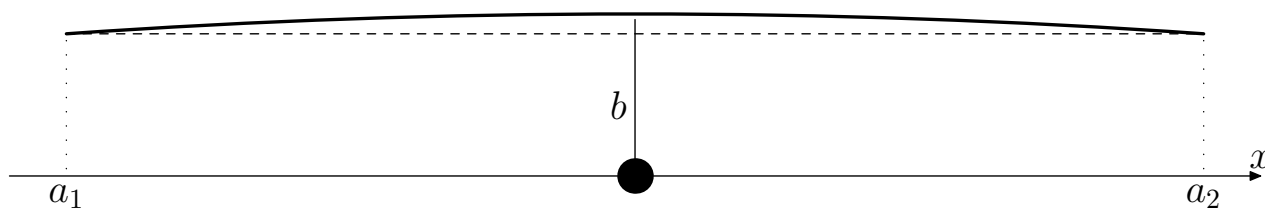


Рис. 21.2. К расчёту задержки сигнала. Солнце внизу посередине, пунктир — путь сигнала в отсутствие гравитационного поля, сплошная кривая — истинный путь сигнала (преувеличено).

¹⁾ На максимальное значение, а не на экстремум.

²⁾ Третьим было гравитационное красное смещение.

этих формул интервал ds переписывается так:

$$\begin{aligned}
ds^2 &= c^2 \left(1 - \frac{r_g}{r}\right) dt^2 - r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) - \frac{dr^2}{1 - \frac{r_g}{r}} = \\
&= c^2 \left(1 - \frac{r_g}{r}\right) dt^2 - \underbrace{r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) - dr^2}_{-(d\mathbf{r})^2} + dr^2 - \frac{dr^2}{1 - \frac{r_g}{r}} = \\
&= c^2 \left(1 - \frac{r_g}{r}\right) dt^2 - (d\mathbf{r})^2 - \frac{r_g}{r} \frac{dr^2}{1 - \frac{r_g}{r}} = \\
&= c^2 \left(1 - \frac{r_g}{r}\right) dt^2 - dx^2 \left[1 + \frac{r_g}{r} \left(1 - \frac{r_g}{r}\right)^{-1} \frac{x^2}{r^2}\right]. \quad (22.1)
\end{aligned}$$

Приравнивание интервала к нулю (для света) даёт:

$$c^2 \left(1 - \frac{r_g}{r}\right) dt^2 = dx^2 \left[1 + \frac{r_g}{r} \left(1 - \frac{r_g}{r}\right)^{-1} \frac{x^2}{r^2}\right].$$

Отсюда, сохраняя только члены первого порядка малости по r_g/r , получаем время распространения сигнала на отрезке dx :

$$dt = \frac{dx}{c} \left[1 + \frac{r_g}{2r} + \frac{r_g x^2}{2r^3}\right] \quad \left(r = \sqrt{x^2 + b^2}\right).$$

Элементарное¹⁾ интегрирование даёт полное время движения сигнала от точки a_1 до точки a_2 , которое отличается от наивного $(a_2 - a_1)/c$:

$$\begin{aligned}
\Delta t &= \frac{1}{c} \int_{a_1}^{a_2} \left(1 + \frac{r_g}{2r} + \frac{r_g x^2}{2r^3}\right) dx = \\
&= \frac{a_2 - a_1}{c} + \frac{r_g}{2c} \ln \frac{a_2 + r_2}{a_1 + r_1} + \frac{r_g}{2c} \left[\ln \frac{a_2 + r_2}{a_1 + r_1} - \left(\frac{a_2}{r_2} - \frac{a_1}{r_1}\right) \right] = \\
&= \frac{a_2 - a_1}{c} + \frac{r_g}{c} \ln \frac{a_2 + r_2}{a_1 + r_1} - \frac{r_g}{2c} \left(\frac{a_2}{r_2} - \frac{a_1}{r_1}\right). \quad (22.2)
\end{aligned}$$

Задержка сигнала имеет те же корни, что и гравитационное красное смещение: часы, помещённые в более сильное гравитационное поле, идут медленнее. Связь становится очевидной, если представить часы, в которых свет путешествует между двумя параллельными зеркалами от одного зеркала до другого.

¹⁾Когда так написано — жди проблем ☹. Хотя это не страшно [16, гл. IV, § 9].

Первые эксперименты по проверке предсказания задержки сигнала были проведены в 1966 и 1967 годах при радиолокации Венеры и Меркурия в моменты их верхнего противостояния¹⁾ с Землёй [22]. Эти эксперименты показали согласие с теорией в пределах экспериментальной погрешности 20 %. Результаты расчёта по формуле (22.2) при условии, что сигнал проходит вблизи Солнца (прицельное расстояние b равно радиусу Солнца $6,96 \cdot 10^8$ м) приведены в таблице 23.1.

Более свежие экспериментальные данные, связанные с наблюдениями потоков нейтрино и фотонов от взрыва сверхновой, показывают, что временная задержка, предсказываемая теорией, не зависит от типа частиц, что служит также ещё одним подтверждением принципа эквивалентности, лежащего в основе общей теории относительности [23, 24].

Таблица 23.1. Время движения сигнала от Земли до планеты в период верхнего противостояния. Радиус орбиты Земли принят равным $1,496 \cdot 10^{11}$ м. Общее время — время распространения сигнала от Земли до указанной планеты, вычисленное по формуле (22.2); задержка — два последних слагаемых в формуле (22.2). Гравитационный радиус Солнца — $r_g = 2953,55$ м.

Планета	Радиус орбиты, м	Общее время, с	Задержка, с
Меркурий	$5,791 \cdot 10^{10}$	692,178954	0,000100
Венера	$10,82 \cdot 10^{10}$	859,961700	0,000106

¹⁾По разные стороны от Солнца.

Приложение: решение Шварцшильда в «Мáксиме»

Символы Кристоффеля: $mcs_{i,k,l} \equiv \Gamma_{i-1,k-1}^{l-1}$, тензор Риччи: $ric_{i,k} \equiv R_{i-1,k-1}$.
 Задан метрический тензор. Символы Кристоффеля и компоненты тензора Риччи вычисляются с помощью пакета `ctensor`.

```

Maxima 5.21.1 http://maxima.sourceforge.net
using Lisp CLISP 2.47 (2008-10-23)
Distributed under the GNU Public License. See the file COPYING.
Dedicated to the memory of William Schelter.
The function bug_report() provides bug reporting information.
(%i1) load(ctensor);
(%o1) /usr/share/maxima/5.21.1/share/tensor/ctensor.mac
(%i2) csetup();
Enter the dimension of the coordinate system:
4;
Do you wish to change the coordinate names?
yes;
Enter a list containing the names of the coordinates in order
[t, r, %theta, %phi];
Do you want to
1. Enter a new metric?
2. Enter a metric from a file?
3. Approximate a metric with a Taylor series?
1;

Is the matrix 1. Diagonal 2. Symmetric 3. Antisymmetric 4. General
Answer 1, 2, 3 or 4 :
1;
Row 1 Column 1:
exp(%nu);
Row 2 Column 2:
-exp(%lambda);
Row 3 Column 3:
-r^2;
Row 4 Column 4:
-(r*sin(%theta))^2;

Matrix entered.
Enter functional dependencies with DEPENDS or 'N' if none
depends([%nu, %lambda], r);
Do you wish to see the metric?
yes;

      [ %nu
      [ %e      0      0      0      ]
      [
      [          %lambda
      [ 0      - %e      0      0      ]
      [
      [          2
      [ 0      0      - r      0      ]
      [
      [          2      2
      [ 0      0      0      - sin (%theta) r ]

(%o2) done
(%i3) christof(mcs);

      %nu - %lambda
      %e          %nu
              r
(%t3) mcs      = -----
      1, 1, 2      2

              %nu
              r
(%t4) mcs      = ----
      1, 2, 1      2
    
```



```

                                %lambda
                                r
(%t5)      mcs      = -----
            2, 2, 2      2

                                1
(%t6)      mcs      = -
            2, 3, 3      r

                                1
(%t7)      mcs      = -
            2, 4, 4      r

                                - %lambda
                                r
(%t8)      mcs      = - %e
            3, 3, 2

                                cos(%theta)
                                -----
(%t9)      mcs      = -----
            3, 4, 4      sin(%theta)

                                - %lambda      2
                                sin (%theta) r
(%t10)     mcs      = - %e
            4, 4, 2

(%t11)     mcs      = - cos(%theta) sin(%theta)
            4, 4, 3

(%o11)
(%i12) ricci(mcs);
                                done
                                %nu - %lambda      %nu - %lambda
                                %e      %nu      %e      %nu
                                r      r r
(%t12) ric      = ----- + -----
            1, 1      r      2
            %nu - %lambda      %nu - %lambda
            %e      ( %nu )      %e      %nu ( %nu - %lambda )
            r      r      r      r r
----- + -----
            4      2
            %lambda %e      %nu
            r      r
+ -----
            4

                                2
                                %lambda %nu      ( %nu )      %lambda %nu
                                r      r r      r      r r
(%t13)      ric      = ----- - ----- + -----
            2, 2      r      2      4      4

                                - %lambda      - %lambda
                                %e      %nu r      %e      %lambda r
                                r      r      r
(%t14) ric      = - ----- + ----- - %lambda
            3, 3      2      2
                                                                + 1

                                - %lambda      2
                                %e      %nu sin (%theta) r
                                r
(%t15) ric      = - -----
            4, 4      2
            - %lambda      2
            %e      %lambda sin (%theta) r
            r
+ ----- - %lambda      2
            2      %e      sin (%theta)

            2
+ sin (%theta)

(%o15)
                                done

```

Источники

1. *Эйнштейн А.* О специальной и общей теории относительности. — Пет-роград.: Гос. изд., 1922. — 79 с. См. с. 4.
2. *Тейлор Э. Ф., Уилер Дж.* Физика пространства и времени. Пер. с англ. — 2, доп. изд. — М.: Мир, 1971. — 320 с. См. с. 4.
3. *Паули В.* Теория относительности. Пер. с нем. — 3, испр. изд. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 1991. — 328 с. См. с. 4 и 5.
4. *Мизнер Ч., Торн К., Уилер Дж.* Гравитация: Пер. с англ. — М.: Мир, 1977. — Т. I. — 512 с. См. с. 4 и 5.
5. *Мизнер Ч., Торн К., Уилер Дж.* Гравитация: Пер. с англ. — М.: Мир, 1977. — Т. II. — 512 с. No citations.
6. *Мизнер Ч., Торн К., Уилер Дж.* Гравитация: Пер. с англ. — М.: Мир, 1977. — Т. III. — 512 с. См. с. 4, 18 и 21.
7. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Теоретическая физика: учебное пособие для вузов. В 10 т. / Под ред. Л. П. Питаевского. — 8, стереот. изд. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2001. — Т. I. Механика. — 224 с. См. с. 4, 15 и 18.
8. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Теоретическая физика: учебное пособие для вузов. В 10 т. / Под ред. Л. П. Питаевского. — 5, стереот. изд. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2006. — Т. II. Теория поля. — 536 с. См. с. 4, 5 и 12.
9. Axiom: the scientific computation system. — Vol. 0. Axiom Jenks and Sutor. — 1187 pp. <http://axiom-developer.org/>. См. с. 4.
10. Система аналитических вычислений Maxima. <http://wxmaxima.sourceforge.net/>. См. с. 4 и 8.
11. *Woollett Edwin L. (Ted).* Maxima by Example. <http://www.csulb.edu/~woollett/>. См. с. 4.
12. *Ильина В. А., Силаев П. К.* Система аналитических вычислений Maxima для физиков-теоретиков. — Ижевск: «Регулярная и хаотическая динамика», 2009. — 140 с. См. с. 4 и 8.
13. *Хриплович И. Б.* Общая теория относительности. — Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2001. — 120 с. См. с. 5, 12 и 15.
14. PhET: Free Interactive Simulations. <http://phet.colorado.edu/>. См. с. 15.

15. Роузвер Н. Т. Перигелий Меркурия: от Леверье до Эйнштейна. Пер. с англ. — М.: Мир, 1985. — 246 с. См. с. 15 и 18.
16. Задачи и упражнения по математическому анализу для вузов / Под ред. Б. П. Демидовича. — М.: АСТ: Астрель, 2006. — 495 с. См. с. 16, 19 и 22.
17. Таблицы физических величин. Справочник / Под ред. И. К. Кикоина. — М.: Атомиздат, 1976. — 1008 с. См. с. 18.
18. Clemence G. M. The relativity effect in planetary motions // *Rev. Mod. Phys.* — 1947. — Oct. — Vol. 19, no. 4. — Pp. 361–364. <http://link.aps.org/doi/10.1103/RevModPhys.19.361>. См. с. 18.
19. Гинзбург В. Л. Экспериментальная проверка общей теории относительности // *Успехи физических наук.* — 1956. — Т. 59, № 1. — С. 11–49. <http://ufn.ru/ru/articles/1956/5/c/>. См. с. 20.
20. Гинзбург В. Л. Об экспериментальной проверке общей теории относительности // *Успехи физических наук.* — 1979. — Т. 128, № 3. — С. 435–458. <http://ufn.ru/ru/articles/1979/7/b/>. См. с. 20.
21. Shapiro Irwin I. Fourth test of general relativity // *Physical Review Letters.* — 1964. — Dec. — Vol. 13, no. 26. — Pp. 789–791. <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.20.1265>. См. с. 21.
22. Fourth test of general relativity: Preliminary results / Irwin I. Shapiro, Gordon H. Pettengill, Michael E. Ash et al. // *Phys. Rev. Lett.* — 1968. — May. — Vol. 20, no. 22. — Pp. 1265–1269. <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.20.1265>. См. с. 23.
23. Longo Michael J. New precision tests of the einstein equivalence principle from SN1987A // *Phys. Rev. Lett.* — 1988. — Jan. — Vol. 60, no. 3. — Pp. 173–175. <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.60.173>. См. с. 23.
24. Krauss Lawrence M., Tremaine Scott. Test of the weak equivalence principle for neutrinos and photons // *Phys. Rev. Lett.* — 1988. — Jan. — Vol. 60, no. 3. — Pp. 176–177. <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.60.176>. См. с. 23.

Игорь Николаевич Пашев

**Центрально-симметричное гравитационное поле
в общей теории относительности**

(методические рекомендации)

Подписано в печать 27.07.2010.

Формат 60 × 84 1/16. Бумага офисная.
Объём 1,7 п. л. Тираж 60 экз. Заказ № 208.

Типография ООО «Кира»
163061, г. Архангельск, ул. Поморская, 34
Тел./факс: (8182) 65-47-11
Электронпочта: oookira@atnet.ru